

## Математическое моделирование загрязнения океанов

Растущая добыча нефти, глобализация нефтеперевозок и ввод в эксплуатацию новых месторождений, как на суше, так и на континентальном шельфе, с каждым годом приводит к увеличению количества нефтеразливов и огромным финансовым и природным потерям. Нефтяное загрязнение неизбежно связано с любыми операциями по добыче и транспортировке нефти, его масштабы могут быть различными, как незначительными и легко устранимыми, так и катастрофическими. Экологические последствия разливов нефти при авариях танкеров и нефтеналивных судов обсуждаются учеными и исследователями со всего мира. Способность нефти покрывать тонкой пленкой большие акватории моря при сравнительно небольших разливах приводит к тому, что даже незначительный разлив приводит к крайне негативным последствиям. Большую опасность такое загрязнение представляет для морских птиц, которые при прямом контакте с нефтью теряют изоляционные и водоотталкивающие свойства перьевого покрова, что может вызвать смерть птицы от переохлаждения. Наиболее вредные последствия разлива нефти для рыб наблюдаются в мелководной части моря, в зонах циркуляции воды и размножения рыбы. Рыбы на ранних стадиях жизни более чувствительны к воздействию нефти, чем взрослые особи, поэтому значительное число рыб на этой стадии погибает при соприкосновении с достаточно высокими концентрациями токсичных компонентов нефти в водной толще. Крупномасштабные аварийные разливы нефти могут оказывать воздействие на морских млекопитающих путем прямого загрязнения тела нефтью, при вдыхании животными токсичных летучих ароматических углеводородов, а также в результате попадания нефти в пищеварительную систему при загрязнении природных источников пищи.

Зависимость мировой экономики от нефтеуглеродного сырья, и, соответственно, необходимость его транспортировки от производителя до потребителя заставляет искать эффективные пути обеспечения экологической безопасности перевозок нефти. Были подписаны и выполняются международные конвенции и соглашения, регламентирующие ответственность перевозчиков за возможные разливы, значительно улучшены технические характеристики танкеров, повышена эффективность служб береговой охраны и проводки судов, созданы международные и региональные центры мониторинга и реагирования на нефтеразливы. Но, несмотря на все принимаемые меры, проблема загрязнения морей нефтепродуктами по-прежнему остается актуальной.

В настоящее время имеется множество способов борьбы с нефтяными загрязнениями. Наибольшее распространение получили механические и биодеструкционные методы.

Но механические методы лишь частично решают проблему сбора основного количества нефти и совсем малоэффективны и в случае, когда нефть растекается тонкой пленкой, в таких случаях обычно используют так называемые биодеструкционные методы.

Биодеструкционные методы очистки акваторий морей от нефти и нефтепродуктов признаны во всем мире, так как они являются безвредными, экологически чистыми, а также предполагают возможность восстановления естественной среды. Благодаря воздействию нефтеокисляющих микроорганизмов нефть трансформируется до простых соединений, происходит накопление нового органического вещества и дальнейшее включение его в круговорот углерода в водоемах. Биодеструкционные методы связанные с применением нефтеокисляющих микроорганизмов в настоящее время получили широкое распространение, т.к. они предназначены для разрушения именно тонкой нефтяной пленки, они экономически более эффективны.

Ниже приведена математическая модель нефтяного загрязнения вод океана с источников загрязнения.

После того как нефть поднимается на поверхность океана в зависимости от типа нефти, погоды, ветровых и волновых условий, так же как воздушной и морской температуры начинаются разнообразные физические (адвекции, диффузии и растекания), химические (испарения, растворения и эмульгирования), и биологических процессы деструкции нефти.



Рис. 4.2 Разные примеры нефтяного загрязнения океанов и морей

$$\begin{aligned}
1) \quad & \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta + \frac{1}{\rho_0} \int_0^h \rho dz \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left( k_1 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_3 \frac{\partial u}{\partial z} \right) - fu \\
2) \quad & \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -g \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta + \frac{1}{\rho_0} \int_0^h \rho dz \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left( k_1 \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_3 \frac{\partial v}{\partial z} \right) - fv \\
3) \quad & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\
4) \quad & \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \\
& = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_1 \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_2 \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_3 \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\
5) \quad & \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} + w \frac{\partial S}{\partial z} = \\
& = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_1 \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_2 \frac{\partial S}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_3 \frac{\partial S}{\partial z} \right) \\
6) \quad & \frac{\partial M}{\partial t} + u \frac{\partial M}{\partial x} + v \frac{\partial M}{\partial y} = G(t) \\
7) \quad & \rho = \rho_0 (1 - \beta T + \alpha S)
\end{aligned}$$

Для этой системы уравнений ставим следующие граничные условия:

$$u = v = w = 0,$$

$$\text{на дне океана: } \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial S}{\partial x_i} = 0$$

$$\text{на побережье: } \frac{\partial M}{\partial n} = 0$$

$$\text{условия на поверхности океана: } k_3 \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\tau_{wx}}{\rho_0}$$

$$k_3 \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\tau_{wy}}{\rho_0}$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = 0$$

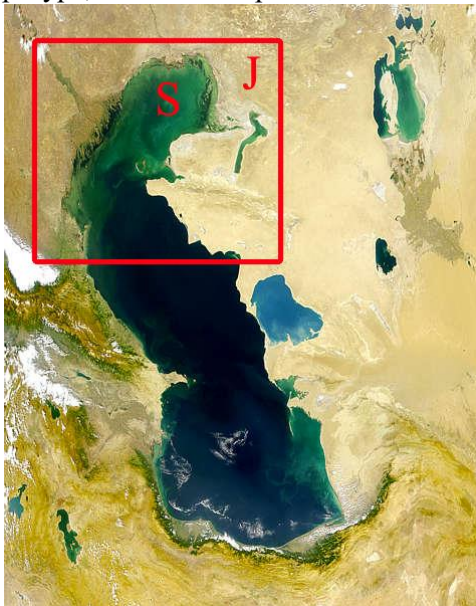
$$k_3 \frac{\partial T}{\partial z} = -K_v (T - T_a)$$

кинематическое условие:  $\frac{\partial \eta}{\partial t} = w$

$\eta$  - океанская волна.

Первое уравнение описывает скорость ветра с востока на запад или же в обратном направлении. Второе уравнение описывает скорость ветра с юга на север или севера на юг. Третье - уравнение неразрывности. Четвертое - уравнение для изменения температуры окружающей среды. Пятое - уравнение - для концентрации (соленость). Шестое - уравнение концентрации нефти, а седьмое - описывает изменения плотности.

Здесь  $u$ ,  $v$  и  $w$  компоненты скорости,  $g$  - ускорение свободного падения,  $\eta$  - океанская волна,  $\rho_0$  - начальная плотность окружающей среды,  $k_1, k_2, k_3$  - коэффициенты диффузии,  $h$  - высота,  $\beta$  - коэффициент расширения и сжимаемости,  $\alpha$  - коэффициент насыщенности,  $T$  - температура,  $S$  - концентрация,  $M$  - концентрация нефти.



В уравнениях (1) и (2) используется  $f$

$$\text{Где } f = \frac{\xi}{\varepsilon} = \begin{cases} \xi = 1, & x_i \in J \\ \xi = 0, & x_i \in S \end{cases}$$

$$\varepsilon = 10^{-n}$$

Функция  $f$  используется для того, чтобы математическая модель учитывала реальный береговой контур, и этот метод называется методом фиктивных областей.

#### Численный алгоритм для решения системы уравнений:

- 1) Уравнение (4) решаем с помощью метода дробных шагов, который был подробно описан в главах 3.1 и 3.7.
- 2) Решаем уравнение (5) так же, методом дробных шагов.
- 3) Найденную температуру ( $T$ ) и концентрацию ( $S$ ) подставляем в уравнение (6) и находим плотность  $\rho$ .
- 4) Найденную плотность ( $\rho$ ) подставляем в уравнения (1) и (2) и снова применяем метод дробных шагов. Ввиду того, что количество неизвестных превышает

количество уравнений, необходимо использовать метод расщепления по физическим параметрам. С этой целью решаем (1) и (2) уравнения методом дробных шагов без учета океанской волны. Давайте напишем алгоритм для первого уравнения. С помощью метода дробных шагов находим  $u^{n+1/3}$  и  $u^{n+2/3}$ , а для третьего шага  $u^{n+1}$  добавляем океанскую волну, которая не была учтена до этого

$$\begin{aligned} A_i u^{n+1}_{i+1} + B_i u^{n+1}_i + C_i u^{n+1}_{i-1} = \\ = D_i - g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad i = 1, N-1 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Решение будем искать в виде } u^{n+1}_i = \alpha_i + \beta_i \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2)$$

Теперь подставим (2) в (1) и получим

$$\begin{aligned} A_i (\alpha_{i+1} + \beta_{i+1} \frac{\partial \eta}{\partial x}) + B_i (\alpha_i + \beta_i \frac{\partial \eta}{\partial x}) + \\ + C_i (\alpha_{i-1} + \beta_{i-1} \frac{\partial \eta}{\partial x}) = D_i - g \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{aligned}$$

Последнее уравнения разделим на два уравнения

$$\begin{aligned} A_i \alpha_{i+1} + B_i \alpha_i + C_i \alpha_{i-1} = D_i \\ A_i \beta_{i+1} \frac{\partial \eta}{\partial x} + B_i \beta_i \frac{\partial \eta}{\partial x} + C_i \beta_{i-1} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{aligned} \quad (3)$$

Сокращая второе уравнение (3) системы на  $\frac{\partial \eta}{\partial x} \neq 0$ , получаем

$$\begin{aligned} A_i \alpha_{i+1} + B_i \alpha_i + C_i \alpha_{i-1} = D_i \\ A_i \beta_{i+1} + B_i \beta_i + C_i \beta_{i-1} = -g \end{aligned}$$

Отсюда с помощью матричной прогонки можно будет найти  $\alpha_i$  и  $\beta_i$

$$\text{А для второго уравнения примем } v^{n+1}_i = \gamma_i + \sigma_i \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (4)$$

и проделываем такую же операцию как для  $u^{n+1}_i$ .

5) Теперь интегрируя (3) систему уравнений по z получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h v dz + w = 0$$

Используя кинематическое условие, можно будет переписать последнее уравнение в таком виде

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h v dz = 0 \quad (5)$$

Теперь подставив в (5) уравнения (2) и (4), получим

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h (\alpha_i + \beta_i \frac{\partial \eta}{\partial x}) dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h (\gamma_i + \sigma_i \frac{\partial \eta}{\partial y}) dz = 0$$

Так как коэффициенты  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \sigma_i$  не зависят от  $z$ , то последнее уравнение в виде

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + S_1 + S_2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + S_3 + S_4 \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0$$

Данное уравнение решаем с помощью матричной прогонки

$$\frac{\eta^{n+1}_{ij} - \eta^n_{ij}}{\Delta t} + \frac{\eta^{n+1}_{i+1j} - 2\eta^{n+1}_{ij} + \eta^{n+1}_{i-1j}}{\Delta x^2} + \frac{\eta^{n+1}_{ij+1} - 2\eta^{n+1}_{ij} + \eta^{n+1}_{ij-1}}{\Delta y^2} = -S_{1ij} - S_{3ij}$$

Находим коэффициенты, приводя все то же уравнение к векторному виду

$$A_i \eta_{i+1} + B_i \eta_i + C_i \eta_{i-1} = D_i$$

$$A_i = \begin{vmatrix} \frac{S_2}{\Delta y^2} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \frac{S_2}{\Delta y^2} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\dot{S}_2}{\Delta y^2} \end{vmatrix} \quad C_i = \begin{vmatrix} \frac{S_2}{\Delta y^2} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \frac{S_2}{\Delta y^2} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\dot{S}_2}{\Delta y^2} \end{vmatrix}$$

$$B_i = \begin{vmatrix} \frac{1}{\Delta t} - \frac{2S_2}{\Delta x^2} - \frac{2S_4}{\Delta y^2} & \frac{S_4}{\Delta y^2} & \cdot & 0 \\ \frac{S_2}{\Delta y^2} & \frac{1}{\Delta t} - \frac{2S_2}{\Delta x^2} - \frac{2S_4}{\Delta y^2} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{S_4}{\Delta y^2} \\ 0 & 0 & \frac{S_2}{\Delta y^2} \cdot \frac{1}{\Delta t} - \frac{2S_2}{\Delta x^2} - \frac{2S_4}{\Delta y^2} & \cdot \end{vmatrix}$$

Далее решаем с помощью матричной прогонки, которая была описана в главе 3.3.

б) Шестое уравнения для концентрации нефти аппроксимируем и решаем тоже с помощью матричной прогонки

$$\frac{M^{n+1}_{ij} - M^n_{ij}}{\Delta t} + u_{ij}^n \frac{M^{n+1}_{i+1j} - M^{n+1}_{i-1j}}{2\Delta x} + v_{ij}^n \frac{M^{n+1}_{ij+1} - M^{n+1}_{ij-1}}{2\Delta y} = G(t)$$

Приводим к векторному виду последнее уравнение и находим все коэффициенты

$$A_i M_{i+1} + B_i M_i + C_i M_{i-1} = D_i$$

$$A_i = \begin{vmatrix} \frac{u_{ij}^n}{2\Delta x} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \frac{u_{ij}^n}{2\Delta x} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \frac{u_{ij}^n}{2\Delta x} \end{vmatrix} \quad C_i = \begin{vmatrix} \frac{u_{ij}^n}{2\Delta x} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \frac{u_{ij}^n}{2\Delta x} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \frac{u_{ij}^n}{2\Delta x} \end{vmatrix}$$

$$B_i = \begin{vmatrix} \frac{1}{\Delta t} & \frac{v_{ij}^n}{\Delta y^2} & \cdot & 0 \\ \frac{v_{ij}^n}{\Delta y^2} & \frac{1}{\Delta t} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \frac{v_{ij}^n}{\Delta y^2} & \frac{1}{\Delta t} \end{vmatrix}$$

Далее решаем с помощью матричной прогонки